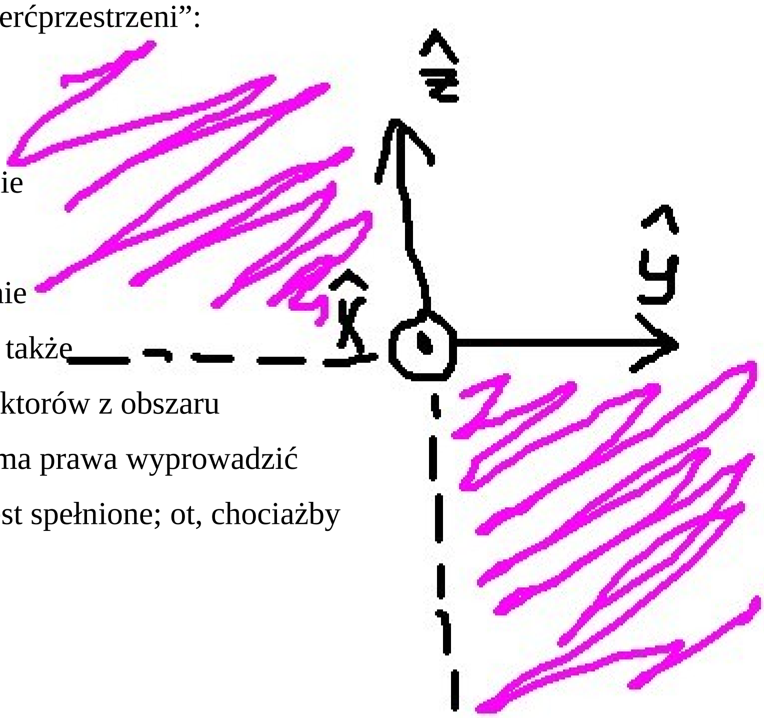
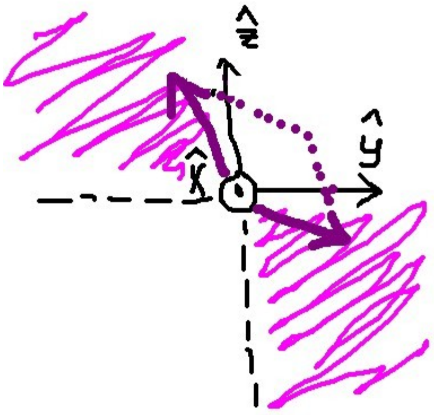
Ad 1.a.) Spójrzmy na ten punkt z wyobraźnią przestrzenną (tak, nie ma jednego, szablonowego sposobu na zrobienie każdego zadania). Jaki obszar w przestrzeni 3D zajmują wspomniane wektory? x jest dowolne, a wtedy gdy y jest dodatnie, to z jest ujemne. Gdy zaś y jest ujemne, to z jest dodatnie.

To przywodzi obraz dwóch „ćwierćprzestrzeni”:



Ażeby ten zamalowany obszar był podprzestrzenią wektorową, dowolnie wyskalowany wektor wewnątrz obszaru (początek każdego wektora jest w 0;0) nie może wyjść poza zamalowany obszar, a także dodanie do siebie dwóch dowolnych wektorów z obszaru (zgodnie z regułą równoległoboku) nie ma prawa wyprowadzić poza obszar. Widzimy jasno, że to nie jest spełnione; ot, chociażby dla wektorów: [0, 2, -1] i [0, -1, 2]:



Bezpośredni rachunek to potwierdza: [0, 2, -1] + [0, -1, 2] = [0, 1, 1]. Czyli utraciliśmy właściwość, że składowa y razy składowa z jest niedodatnia.

Ad 1.b.) Wektor spełniający x + y + z = 0 będzie spełniał ten warunek także po przeskalowaniu (obustronnym pomnożeniu równości przez a). A także suma dwóch wektorów będzie spełniała warunek, bo dodawanie jest łączne i przemienne:

$$(x1 + x2) + (y1 + y2) + (z1 + z2) = (x1 + y1 + z1) + (x2 + y2 + z2) = 0 + 0 = 0.$$

Drugi warunek – analogicznie: x = y <=> ax = ay; x1 = y1 oraz x2 = y2 => (x1 + x2) = (y1 + y2).

Zawsze, gdy kombinacja współrzędnych jest 1. stopnia i bez wolnego wyrazu (operacje *liniowe* na współrzędnych), taki warunek będzie spełniony (będzie zadawał podprz. wektorową).

Ad. 1.c.) Znowu trzeba ruszyć wyobraźnią. Warunek mówi, że odległość x od y jest nie większa od 1. Oczywiście, że dodając dwie pary liczb, które spełniają ten warunek, można „wyprowadzić" wynik „poza" ten warunek:

Weźmy [0, 1] i [0, 1]. Suma [0, 1] + [0, 1] = [0, 2] oczywiście nie spełnia już warunku.

Ad 1.d.) Nie potrzeba nam żadnych twierdzeń dotyczących wyznaczników; wystarczy zdrowy rozsądek i wyobraźnia (tak!). Weźmy $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Obu det wynosi 0, ale ich sumy, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, oczywiście 1. Wiec znowu nie ma takiej podprzestrzeni wektorowej.

Ad 1.e.) Jak już się rzekło w 1.b.), są to same liniowe kombinacje liczb x i y. A więc mnożenie przez liczbę i dodawanie drugiego takiego kombinatu nie zniszczy warunku.

Np. dla celki 2; 1 macierzy: x1+ y1 + x2 + y2 = (x1 + x2) + (y1 + y2),

czyli to samo co w celce 1; 1 plus to co w celce 1; 2.

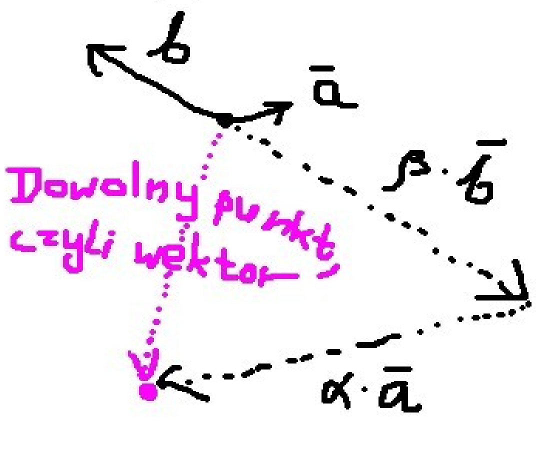
Ad 1.f.) Ten warunek w ogóle znaczy tyle, że wektor albo jest zerem, albo leży na prostej. Oczywiście, skalowanie i dodawanie do wektora współliniowego mu wektora, nie wyprowadzi poza prostą.

Ad 1.g.) To w ogóle jest trywialna podprzestrzeń, składa się jedynie z {0}. a * 0 = 0, 0 + 0 = 0.

Ad 2.) Kombinacje liniowe – z definicji. Powstaje układ 3 równań liniowych na 3 współczynniki.

Ad 3.a.) Przypominamy sobie teorię (wnioski płynące z definicji l.niez.). Żaden z wektorów nie może być liniową kombinacją pozostałych. Wystarczy, żeby np. pierwszy nie był komb.l. trzech kolejnych (oczywiście wszystko jedno, który: pierwszy, drugi, trzeci, czy czwarty! Dlaczego? Wskazówka do bardzo prostej odpowiedzi na to pytanie w 9.).

Jako, że dwa wektory na płaszczyźnie, które nie są współliniowe, zadają już całą ową płaszczyznę, bo ich kombinacja liniowa wypada w dowolnym punkcie tej płaszczyzny (reguła równoległoboku! cf. obrazek), to każdy kolejny wektor jest już „nadmiarowy" (tworzy z tamtymi dwoma układ l.zal.). Wobec powyższego, w ogóle



nie da się wymyślić układu **trzech** wektorów na płaszczyźnie, który to układ byłby l.niez.! Bo albo już dwa są l.zal., albo na pewno trzy z nich.

Ad 3.b.) Tu jest sens sprawdzać, bo wektorów jest nie więcej, niż wymiar przestrzeni. Trzeba zobaczyć, czy da się uzyskać wektor np. trzeci poprzez komb.l. pierwszego i drugiego. I tyle. Jeśli nie (a pozostałe dwa wektory nie są przeskalowanym tym samym wektorem) to układ jest l.niez.

Ad 4.a) Pytanie jest tożsame takiemu: czy wektor **u** + **v** da się uzyskać przez komb.l. **v** + **w** i **u** + **w**?

(Nie chce mi się pisać pogrubionym)

$$u + v = a\,(v + w) + b\,(u + w); \quad a, b \text{ – z ciała liczbowego.}$$

$$= a\,v + b\,u + (a+b)\,w.$$

Jako, że z wektora w nie można zrobić żadnej komb.l. v i u (założenie: tworzą układ l.niez.), to a = b = 1, żeby lewa strona = prawej. A wówczas 2w musi być równe 0. w = 0. A układ z 0 jest l.zal.

Ad 4.b.) Analogicznie do 4.a., z tym, że sprawdźmy, czy u może być równe

$$a(u + v) + b\,(u + v + w) + c\,(u + v + w + x).$$

Może, wtedy, gdy a + b + c = 1, bo pozostałe wektory v, w, x nie zrobią w żadnej komb.l. wektora u (założenie o l.niez.).

Wówczas 0 = v + (b + c)w + c x. Jako, że w i x nigdy nie skombinują się do v, ten warunek jest nie do spełnienia. A zatem cały układ jest l.niez (nie da się dobrać a, b i c).

Ad 5.a.) Nie ma o czym mówić, cf. dyskusję 3.a.

Ad 5.b.) Zabrakło jednego wektora; dwa zadają tylko płaszczyznę (w 3D przestrzeni). Chyba, że są współliniowe, to wówczas tylko prostą (w 3D przestrzeni).

Ad 5.c. i d.) Chyba już wiemy, jak to sprawdzić? Liniowa niezależność układu. Inaczej na mocy reguły równoległoboku (w 3D, 4D przestrzeni), zadają dowolny żądany punkt, czyli wektor.

Ad 6.) To ładne zadanie. Rozwiązując je, trzeba zrozumieć, że warunkiem **koniecznym** i zarazem **dostatecznym,** aby układ wektorów u', v', w' tworzył bazę jest to, aby z jego komb.l. można było wygenerować wszystkie (każdy z osobna) wektory poprzedniej bazy (czyli u, v, w).

Dlaczego tak jest? Zobacz sam. Dotychchczasowa baza: u, v, w. Nowa kandydatka na bazę: u', v', w'.

Dowolny wektor = alfa u + beta v + gamma w.

A skoro

a u' + b v' + c w' = alfa u, (jeśli można wygenerować u, to oczywiście także alfa * u),

d u' + e v' + f w' = beta v,

g u' + h v' + i w' = gamma w,

to (dodając te trzy równości)

(a + d + g) u' + (b + e + h) v' + (c + f + i) w' = alfa u + beta v + gamma w = Dowolny wektor.

Liczby a, d, g, b, e, h, c, f, i można dobrać tak, żeby komb.l. u', v' i w' dała dowolny wektor. A zatem u', v', w' także jest bazą.

Twoje zadanie sprowadza się więc do tego, żeby sprawdzić, czy możesz z kombinacji liniowych u, 2u + v oraz 3u – v + 4w odtworzyć wektory u, v, i w.

Policz, a okaże się, że można:

u = 1 u + 0 (2u + v) + 0 (3u – v + 4w),

v = -2 u + 1 (2u + v) + 0 (3u – v + 4w),

w = - 5/4 u + 1/4 (2u + v) + 1/4 (3u – v + 4w).

Ad 9.) Wystarczy zadbać o to, żeby układ był l.niez., czyli żeby komb.l. wektorów nie dawała 0, czyli żeby np. wektor trzeci w b) nie był komb.l. pierwszego i drugiego. Policz, kiedy tak jest, a rozwiązaniem są wszystkie przypadki odwrotne.